සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි /முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $k > 1$ යැයි ගනිමු. $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා, α හා β දෙකම ධන වන පරිදි වූ k හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, $1 < k < 3$ යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන්, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(b) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ හා $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $x^2 + x - 2$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x + 1$ බව දී ඇත. a, b හා c හි අගයන් සොයන්න.

තවද, a, b හා c සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) - 2g(x) \le \frac{13}{12}$ බව පෙන්වන්න.

12. (a) පහත දී ඇති සංඛ්‍යාංක 10න් ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4කින් සමන්විත, සංඛ්‍යාංක 4ක සංඛ්‍යාවක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) තෝරා ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 ම වෙනස් නම්,

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4 ක් තෝරාගත හැකි නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යා ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\frac{1}{5^{r-1}}U_r = f(r) - f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයා,

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

Visit EDUHUB

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{C} = \mathbf{AB^T}$ යැයි ද ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}$ සොයා, සියලු $a \neq 0$ සඳහා $\mathbf{C}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.

a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}^{-1}$, එය පවතින විට, ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව, $\mathbf{DC} - \mathbf{C^TC} = 8\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ හා $z_2 = 1 + i$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{z_1}{z_2}$ යන්න $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

තවද, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර,

ඒ නයින්, $\dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ ද $k \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ යැයි ද ගනිමු.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $(1 - i\tan\theta)^n$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගෙන

$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ බව පෙන්වන්න.

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ යන්න $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ හි විසඳුමක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{4x+1}{x(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

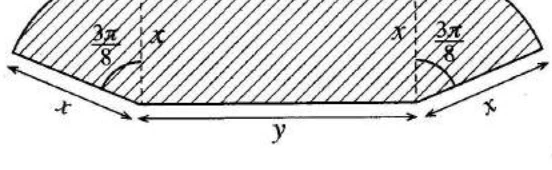
$x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, x-අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $f(x) + |f(x)| > 0$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි අඳුරු කළ S පෙදෙසින් සෘජුකෝණාස්‍රයකින් හා කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{3\pi}{8}$ ක කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ දෙකකින් සමන්විත ගෙවත්තක් දැක්වේ. එහි මාන, මීටරවලින්, රූපයෙහි දක්වා ඇත. S හි වර්ගඵලය $36\ \text{m}^2$ බව දී ඇත. S හි පරිමිතිය p m යන්න $x > 0$ සඳහා $p = 2x + \dfrac{72}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව ද, $x = 6$ විට p අවම වන බව ද පෙන්වන්න.



15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1) + Cx^2$ වන පරිදි A, B හා C නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ යැයි ගනිමු. $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්**, I අගයන්න.

(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x\right) = \ln(x^2+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ සොයා, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln 4 + \pi - 4\right)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ හි අගය සොයන්න.

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ ද l යනු $ax + by + c = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව ද යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l ට ලම්බ වූ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_1 + at, y_1 + bt)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

P හි සිට l ට ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

l යනු $x + y - 2 = 0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $A \equiv (0, 6)$ හා $B \equiv (3, -3)$ ලක්ෂ්‍ය l හි දෙපස පිහිටන බව පෙන්වන්න.

l හා AB රේඛාව අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

l ස්පර්ශ කරන, පිළිවෙළින් A හා B කේන්ද්‍ර සහිත S_1 හා S_2 වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

l හා AB රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

S_1 හා S_2 ට C හරහා වූ අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන, S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන හා S_2 ට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0$ බව පෙන්වන්න.

Visit EDUHUB

17. (*a*) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ හා $\cos(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x\left(\cos 9x - \cos 7x\right) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm හා $\sin 2B = \frac{24}{25}$ බව දී ඇත.

එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබෙන බව පෙන්වා, ඒ එක එකක් සඳහා AC හි දිග සොයන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$ සමීකරණය විසඳන්න.

* * *

Visit EDUHUB